

# Modelo de autodepuração das águas em reservatórios

Walter Del Picchia <sup>1</sup>

**RESUMO** É proposto um modelo simplificado para a determinação de DBO, de oxigênio, de coliformes e de sólidos em suspensão em reservatórios com mistura completa e volume variável. Para reservatórios com volume sensivelmente constante, uma aproximação razoável é empregar as equações desenvolvidas para lagos. Se o volume varia de modo apreciável, porém, esse procedimento poderá ocasionar erros bastante grosseiros, impondo-se então uma formulação mais precisa. Alguns exemplos são utilizados para corroborar as afirmações feitas.

**Palavras-chave:** autodepuração das águas, reservatórios, volume variável, lagos, modelos.

**ABSTRACT** It is proposed a simplified model to determine the concentrations of BOD, oxygen, coliforms and solids in suspension in reservoirs with complete moisture and variable volume. For reservoirs with sensibly constant volumes a reasonable approximation is to use the equations developed for lakes; but if the volume varies in a wide range, this procedure can offer quite gross margins of errors, therefore requiring a more highly precise formulation. Some examples are used to corroborate these assertives.

**Key words:** water self-purification, reservoirs, variable volume, lakes, models.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um modelo analítico simplificado de autodepuração das águas em reservatórios com mistura completa e volume variável. Os resultados obtidos com a aplicação do modelo são comparados com aqueles que seriam alcançados caso fossem utilizadas as equações que descrevem a autodepuração em lagos (volume constante) [1]. O estudo visa também complementar os trabalhos [2] e [3] do mesmo autor.

A solução apresentada é original, pois os reservatórios foram operados com volume variável; embora no volume tenha sido admitida variação linear, a adoção do volume variável acarretou sensível complicação na resolução das equações.

Para reservatórios que apresentam volume sensivelmente constante, podem-se utilizar as mesmas equações empregadas para lagos, com pequenas adaptações, como uma boa aproximação. Porém, para volume variável, esse procedimento pode acarretar erros por demais grosseiros, crescentes com o tempo; nesse caso, impõe-se uma formulação mais precisa que a citada. Os exemplos apresentados ilustram as diferenças encontradas.

A hipótese de mistura completa, embora seja uma limitação na precisão do modelo [1], pode ser aceita para pequenos lagos e reservatórios, considerando-se

<sup>1</sup> Professor Adjunto da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

que os mesmos são normalmente sujeitos a mistura significativa por causa de correntes induzidas pelos ventos [4].

### MODELO DE AUTODEPURAÇÃO

O trabalho foi desenvolvido a partir da admissão das seguintes hipóteses:

- a velocidade de desoxigenação é proporcional à quantidade de DBO remanescente;
- a velocidade de reoxigenação atmosférica é proporcional ao déficit de oxigênio em relação à concentração de saturação ( $C_s$ ) e à área instantânea do espelho de água;
- a velocidade de sedimentação de DBO é proporcional à quantidade de DBO remanescente;
- as velocidades de acréscimo de DBO e de oxigênio, decorrentes de fontes distribuídas (respectivamente depósitos bentônicos para a DBO e fotossíntese para o oxigênio, supondo-se distribuição uniforme), são proporcionais à área instantânea do espelho de água;
- as vazões de entrada, de saída e de lançamento, as cargas e os coeficientes são constantes no tempo;
- há mistura completa, sendo as concentrações de DBO e oxigênio adotadas como uniformes no lago ou reservatório;
- a área superficial (espelho de água) e a área de fundo são supostas como iguais entre si.

Admitiu-se ainda que a concentração de oxigênio é maior que zero, ou seja, o déficit de oxigênio é menor do que o déficit máximo  $D_m$  (que, em valor, é igual a  $C_s$ ).

Na Figura 1 está esquematizado o lago ou reservatório, onde:

- $L$  = demanda bioquímica de oxigênio, primeiro estágio, em mg/l;  
 $L_0$  = valor de  $L$  no instante inicial;  
 $D$  = déficit de oxigênio dissolvido, em relação a  $C_s$ , em mg/l ( $D = C_s - OD$ );  
 $D_0$  = valor de  $D$  no instante inicial;  
 $V$  = volume, em  $10^6 m^3$ ;

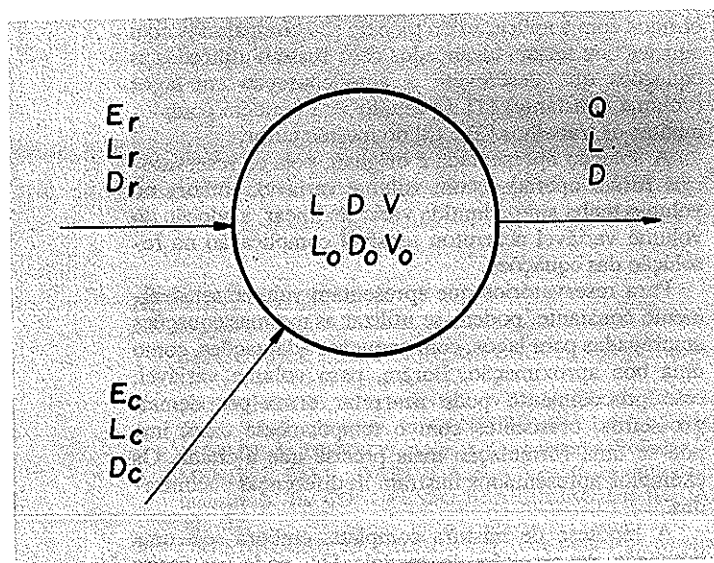


Figura 1 – Esquema do lago ou reservatório.

- $V_0$  = valor de  $V$  no instante inicial;  
 $E_r$  = vazão do rio formador, em  $m^3/s$ ;  
 $L_r$  = concentração respectiva de DBO, em mg/l;  
 $D_r$  = concentração respectiva do déficit de oxigênio, em mg/l;  
 $E_c$  = vazão do lançamento pontual, em  $m^3/s$ ;  
 $L_c$  = concentração respectiva de DBO, em mg/l;  
 $D_c$  = concentração respectiva do déficit de oxigênio, em mg/l;  
 $E = E_r + E_c$  = vazão de entrada, em  $m^3/s$ ;  
 $W = E_r L_r + E_c L_c$  = carga de DBO de entrada, em t/dia;  
 $Z = E_r D_r + E_c D_c$  = carga de déficit de oxigênio de entrada, em t/dia;  
 $Q$  = vazão de saída, em  $m^3/s$ ;  
 $K_1$  = coeficiente de desoxigenação, em  $dia^{-1}$ ;  
 $K_3$  = coeficiente de sedimentação, em  $dia^{-1}$ ;  
 $K_s$  = velocidade de entrada de oxigênio da atmosfera, em m/dia;  
 $S$  = área do espelho de água, em  $km^2$ ;  
 $P_s$  = coeficiente de acréscimo de DBO, em área, em  $mg/m^2/dia$ ;  
 $A_s$  = coeficiente de acréscimo de oxigênio, em área, em  $mg/m^2/dia$ .

A aplicação da equação da continuidade fornece:

$$(1) \frac{d(VL)}{dt} = W - QL - VL(K_1 + K_3) + P_s S,$$

com  $L(0) = L_0$

$$\frac{d(VD)}{dt} = Z - QD - SDK_s - A_s S + VLK_1,$$

com  $D(0) = D_0$

A seguir, estas equações serão aplicadas a três casos:

- a lagos (com  $Q = E$  e portanto com volume constante igual a  $V_0$ );
- a reservatórios com volume sensivelmente constante (com  $Q$  e  $E$ , mas com volume suposto igual a  $V_0$ );
- a reservatórios (com volume variável  $V = V_0 + (E - Q)t$ ).

#### Lagos

Para lagos, serão adotados:

- $Q = E$   
 $V = V_0$ , constante  
 $S = S_0$ , área correspondente a  $V_0$ , constante

$$h_0 = \frac{V_0}{S_0} = \text{profundidade média, em metro}$$

Nessas condições, das equações (1) obtêm-se:

$$\frac{d(V_0 L)}{dt} = W - QL - V_0 L(K_1 + K_3) + P_s S_0$$

$$\frac{d(V_0 D)}{dt} = Z - QD - S_0 DK_s - A_s S_0 + V_0 LK_1$$

Da divisão por  $V_o$  resultam:

$$(2) \frac{dL}{dt} = -bL + (P_v + \frac{W}{V_o})$$

$$\frac{dD}{dt} = -gD + K_1L - (A_v - \frac{Z}{V_o})$$

$$\text{com: } P_v = \frac{P_s}{h_o} =$$

= coeficiente de acréscimo de DBO, em volume, em mg/l/dia

$$A_v = \frac{A_s}{h_o} =$$

= coeficiente de acréscimo de oxigênio, em volume, em mg/l/dia

$$K_2 = \frac{K_s}{h_o} = \text{coeficiente de reoxigenação, em dia}^{-1}$$

$$\beta = \frac{Q}{V_o} + K_1 + K_3, \text{ em dia}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{Q}{V_o} + K_2, \text{ em dia}^{-1}$$

Comparando as equações (2) com as equações que descrevem a autodepuração das águas dos rios em condições aeróbias [2]:

$$(3) \frac{dL}{dt} = -(K_1 + K_3)L + P, \text{ com } L(o) = L_o$$

$$\frac{dD}{dt} = -K_2D + K_1L - A, \text{ com } D(o) = D_o$$

observa-se que (2) pode ser obtida de (3), substituindo ordenadamente em (3):

$K_1$  por  $K_1$

$$K_2 \text{ por } K_2 + \frac{Q}{V_o} = \gamma$$

$$K_3 \text{ por } K_3 + \frac{Q}{V_o}$$

$$P \text{ por } P_v + \frac{W}{V_o}$$

$$A \text{ por } A_v - \frac{Z}{V_o}$$

$K_1 + K_3$  por  $\beta$

$K_2$  por  $\gamma$

Podem-se resolver as equações (2) por meio da Transformação de Laplace [5], ou utilizando a solução apresentada em [2] para rios, fazendo as substituições acima mencionadas. Em ambos os casos obtêm-se, para  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  e  $\beta \neq \gamma$ :

$$(4) L = L_o e^{-\beta t} + \frac{W + P_v V_o}{\beta \cdot V_o} (1 - e^{-\beta t})$$

$$D = \left[ D_o - \frac{Z - A_v V_o}{\gamma \cdot V_o} + \frac{K_1}{b - \gamma} \left( L_o - \frac{W + P_v V_o}{\gamma \cdot V_o} \right) \right] e^{-\gamma t} + \frac{K_1}{\gamma - \beta} \left( L_o - \frac{W + P_v V_o}{\beta \cdot V_o} \right) e^{-\beta t} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{Z - A_v V_o}{V_o} + \frac{K_1 (W + P_v V_o)}{\beta \cdot V_o} \right)$$

#### Reservatórios com volume sensivelmente constante

Nesse caso, uma aproximação conveniente é utilizar as equações apresentadas para lagos, fazendo em (4):

$V_o$  = volume inicial, adotado constante

$Q$  = vazão de saída, utilizada no cálculo de  $\beta$  e  $\gamma$

$W$  e  $Z$  são calculados utilizando as vazões de entrada  $E_r$  e  $E_c$  ( $E = E_r + E_c \neq Q$ ):

$$W = E_r L_r + E_c L_c$$

$$Z = E_r D_r + E_c D_c$$

É óbvio que a aproximação feita será tanto melhor quanto menores forem os tempos de simulação, ou quanto mais próximos entre si forem os valores das vazões de entrada e de saída.

#### Reservatórios

Para reservatórios operando com volume variável, adotar-se-á:

$$Q \neq E$$

$$V = V_o + (E - Q) t$$

$S = S(V)$  será dada pela curva área x volume do reservatório; posteriormente essa curva será aproximada por segmentos de reta  $S = a_i + b_i \cdot V$ , onde  $a_i$  e  $b_i$  são coeficientes relativos ao intervalo  $i$  no qual se está operando.

Fazendo nas equações (1):

$$E - Q = \delta$$

$$V = V_o + \delta t$$

$$\delta V L = \lambda_1$$

$$\frac{K_1 + K_3}{\delta} = K_4$$

$$\frac{Q}{\delta} = K_5$$

$$\delta V D = \lambda_2$$

$$\frac{K_8}{\delta} = K_6$$

$$\frac{K_1}{\delta} = K_7$$

$$\lambda_{10} = \delta V_0 L_0$$

$$\lambda_{20} = \delta V_0 D_0$$

$$dt = \frac{dV}{\delta},$$

obtem-se:

$$\frac{d\lambda_1}{dV} + \left( \frac{K_5}{V} + K_4 \right) \lambda_1 = W + P_s S, \text{ com } \lambda_1(0) = \lambda_{10}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dV} + \left( \frac{K_5 + K_6 S}{V} \right) \lambda_2 = Z - A_s S +$$

$$+ K_7 \lambda_1, \text{ com } \lambda_2(0) = \lambda_{20}$$

Estas equações são do tipo

$$\frac{dx}{dt} + f(t)x = g(t)$$

e sua resolução para  $S = a + bV$  leva a:

$$(5) \lambda_1(V) = e^{-K_4 V} V^{-K_5} [(W + P_s a) \cdot I(V_0, V, K_4, K_5) + P_s b \cdot I(V_0, V, K_4,$$

$$K_5 + 1)] + \lambda_{10} \left( \frac{V_0}{V} \right)^{K_5} e^{K_4(V_0 - V)}$$

$$\lambda_2(V) = e^{-K_6 V} V^{-(K_5 + K_6 a)} [(Z - A_s a) \cdot I(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a) - A_s b \cdot I(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a + 1) + K_7 \cdot J(V_0, V, K_6 b, K_5 + K_6 a, \lambda_1(V))] + \lambda_{20} \left( \frac{V_0}{V} \right)^{K_5 + K_6 a} e^{K_6 b(V_0 - V)}$$

onde:

$$\text{função } I: I(X_0, X, c, r) = \int_{X_0}^X e^{cX} X^r dX$$

$$\text{função } J: J(X_0, X, g, s, f(x)) = \int_{X_0}^X e^{gX} X^s f(x) dX$$

$X_0 > 0, X > 0, c, r, g, s$  quaisquer  
 $f(X)$ : função definida no intervalo  $X_0$  a  $X$ , podendo ser dada por pontos.

As fórmulas acima foram calculadas por computador, fornecendo  $L$  e  $D$  em função do volume e, portanto, em função do tempo. A função  $I$  foi calculada por integração numérica, pelo método de Gauss com dez

pontos, que leva a resultados bastante precisos. A função  $J$  foi obtida aproximando-se  $e^{gX} X^s f(X)$  por meio de uma rotina especial (Spline), a qual calcula a curva que passa por todos os pontos dados obedecendo às equações de uma régua flexível (spline), das utilizadas pelos desenhistas para aproximar funções [6]. Entre cada par de pontos adjacentes faz-se passar um polinômio cúbico, de maneira que a junção de todos os segmentos forme a curva  $s$ . A rotina Spline calcula a curva  $s$ , contínua, com derivadas primeira e segunda contínuas, de modo que a energia potencial da régua seja mínima, fornecendo a curva "mais suave" que passa pelos pontos dados. Após a aproximação, torna-se fácil obter a função  $J$ , pois ela será a integral de uma curva formada por trechos polinomiais.

A utilização das fórmulas (5) é feita aproximando-se  $S = S(V)$  por meio de segmentos de reta  $S = a_i + b_i V$ , onde  $a_i$  e  $b_i$  são os coeficientes do intervalo  $i$  aproximado. As equações são aplicadas dentro de cada intervalo, e toda a vez que  $V$  atingir um dos extremos do intervalo em que se está operando, os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são automaticamente modificados.

A simulação é feita em um determinado intervalo de tempo, por exemplo, um mês, com vazões médias mensais. Obtêm-se  $L$  (DBO) e  $D$  (déficit) em função do tempo; e, se desejado, também o valor de  $L$  e  $D$  médios no intervalo de tempo considerado. Pode-se também continuar com a simulação no mês seguinte, com novos valores de vazões, adotando os valores iniciais iguais aos finais do mês anterior. Um cuidado adicional a tomar é não permitir que o volume  $V$  saia do intervalo  $V_{\min}$  a  $V_{\max}$ ; se isso acontecer, deve-se alterar a vazão de saída, segundo uma dada regra de operação.

## Exemplos

Exemplo 1: Na Figura 3 vêem-se os resultados da simulação da autodepuração em um reservatório utilizando as fórmulas (5) (solução para reservatório). As curvas de  $L$  (DBO) e  $D$  (déficit de oxigênio) são mostradas em traço cheio.

Os dados são:

$$\begin{aligned} V_0 &= 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ E &= 6 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} = 2,315 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} = 0,3858 \text{ m}^3/\text{s} \\ W &= 2 \text{ t/dia} \\ Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\ K_1 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} = 2,315 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \\ K_3 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} = 2,315 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \\ K_8 &= 0,1 \text{ m/dia} \\ P_s &= 4 \cdot 10^3 \text{ mg}/(\text{m}^2 \cdot \text{dia}) \\ A_s &= 2 \cdot 10^3 \text{ mg}/(\text{m}^2 \cdot \text{dia}) \\ L_0 &= 1 \text{ mg/l} \\ D_0 &= 1 \text{ mg/l} \\ V_{\min} &= 0,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ V_{\max} &= 9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$S = f(V)$ : dada pela curva da Figura 2 e aproximada pelos cinco segmentos de reta vistos na mesma.

Tempo de simulação = 30 dias

Intervalo de variação do volume =  $3 \cdot 10^6$  a  $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

Na mesma Figura 3, em curva tracejada, vê-se a simulação de  $L$  e  $D$  para esses mesmos valores, utilizando-se, porém, as equações (4) de lagos, como se o volume fosse sensivelmente constante. Conforme afirmado, o intuito é mostrar como este procedimento, usual

mente aceito para pequena variação de volume, pode acarretar erros grosseiros quando o volume varia muito. Fez-se em (4):

$$\begin{aligned} V &= V_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ S_0 &= 0,8875 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ (calculado sobre a aproximação linear)} \\ Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\ W &= 2 \text{ t/dia} \\ Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\ K_2 &= K_s/h_0 = 0,03 \text{ dia}^{-1} \\ P_v &= P_s/h_0 = 1,2 \text{ mg/(l.dia)} \\ A_v &= A_s/h_0 = 0,6 \text{ mg/(l.dia)} \\ h_0 &= V_0/S_0 = 3,38 \text{ m} \end{aligned}$$

Como se pode observar, os resultados diferem não só do ponto de vista quantitativo como também qualitativo, pois a utilização das equações (4) de lago levariam à conclusão de que o reservatório tornar-se-ia anaeróbio em  $t = 27$  dias. A utilização das equações (5), que prevêem a variação do volume, mostra que o déficit  $D$  fica bem abaixo do déficit máximo  $D_m$ , adotado igual a 8 mg/l.

Exemplo 2: Na Figura 4 vêem-se os resultados de uma simulação com o volume variando pouco, com a utilização das fórmulas (5) para reservatórios (traço cheio). Os dados são:

$$\begin{aligned} V_0 &= 10^6 \text{ m}^3 \\ E &= 6 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\ Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\ W &= 2 \text{ t/dia} \\ Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\ K_1 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} \\ K_3 &= 0,2 \text{ dia}^{-1} \\ K_s &= 0,1 \text{ m/dia} \\ P_s &= 4 \cdot 10^3 \text{ mg/(m}^2 \cdot \text{dia)} \\ A_s &= 2 \cdot 10^3 \text{ mg/(m}^2 \cdot \text{dia)} \\ L_0 &= 1 \text{ mg/l} \\ D_0 &= 1 \text{ mg/l} \\ V_{\min} &= 0,9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ V_{\max} &= 9 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ S &= f(V) \text{ : mesma curva e mesma aproximação do exemplo anterior.} \end{aligned}$$

Tempo de simulação: 2,5 dias.

Intervalo de variação do volume =  $3 \cdot 10^6$  a  $3,4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ .

Na mesma Figura 4, em curva tracejada, pode-se observar a simulação para estes mesmos valores, utilizando, porém, as equações (4) de lagos, pois o volume é sensivelmente constante (variou cerca de 10% no intervalo de simulação). Pela reposta obtida, concluiu-se que as fórmulas de lago forneceram uma boa aproximação para as fórmulas de reservatório. Fez-se em (4):

$$\begin{aligned} V &= V_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ S_0 &= 0,8875 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \\ Q &= 1 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{mês} \\ W &= 2 \text{ t/dia} \\ Z &= 0,6 \text{ t/dia} \\ K_2 &= K_s/h_0 = 0,03 \text{ dia}^{-1} \\ P_v &= P_s/h_0 = 1,2 \text{ mg/(l.dia)} \\ A_v &= A_s/h_0 = 0,6 \text{ mg/(l.dia)} \\ h_0 &= V_0/S_0 = 3,38 \text{ m} \end{aligned}$$

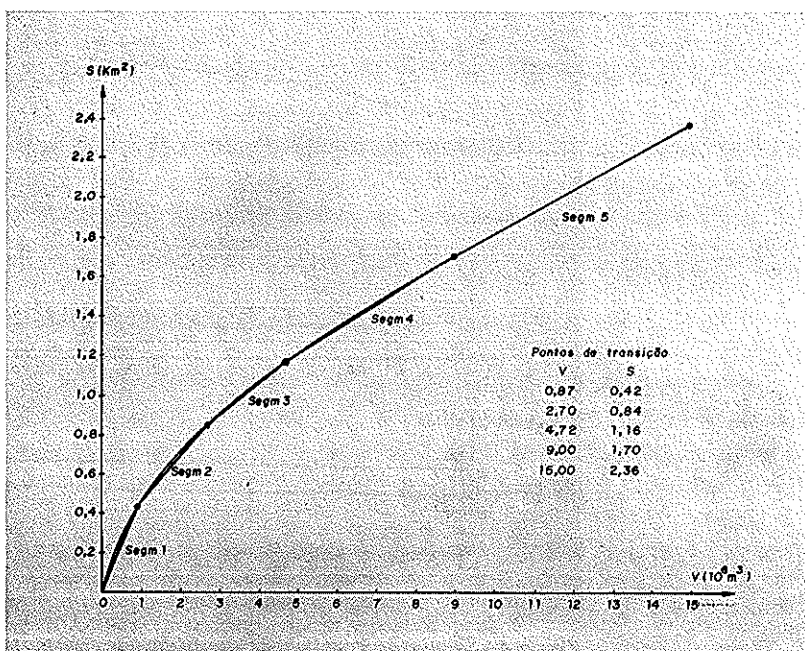


Figura 2 - Área  $S$  em função do volume  $V$ .

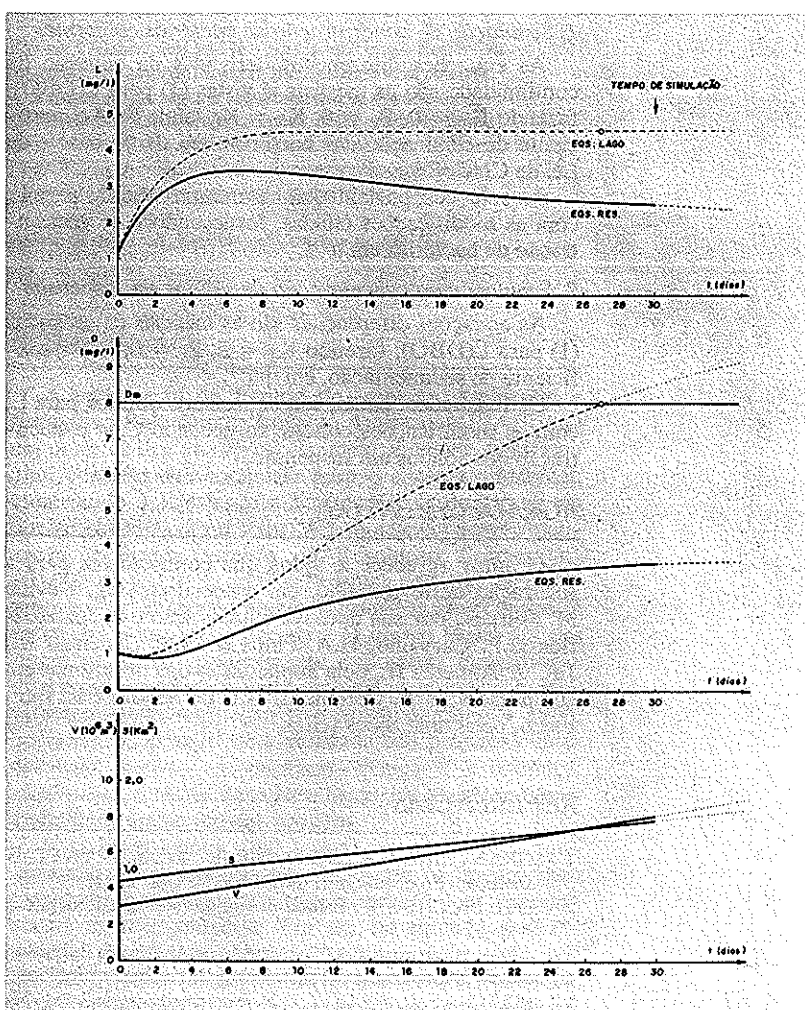


Figura 3 - Simulação com volume variável.

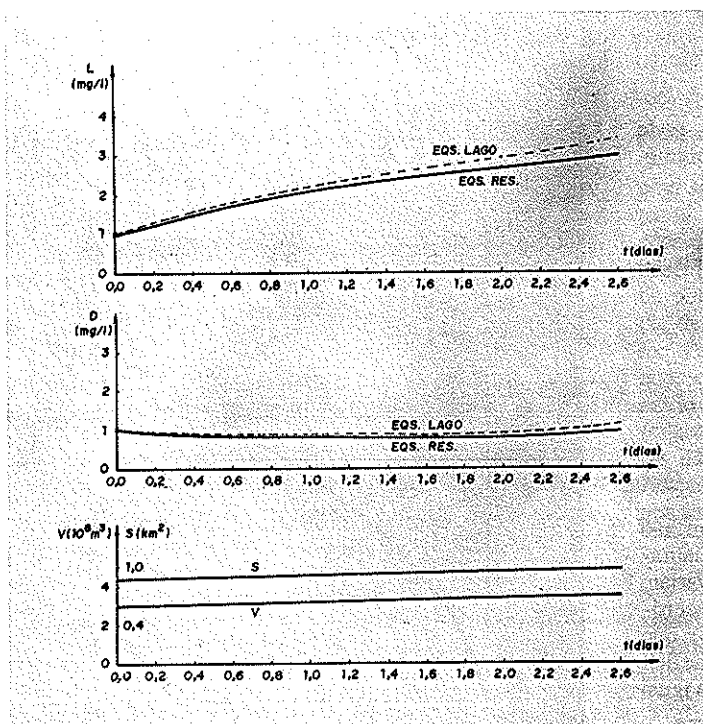


Figura 4 – Simulação com volume sensivelmente constante.

## Extensões

### 1. Simulação da concentração de bactérias coliformes

As equações diferenciais derivadas da equação da continuidade são as mesmas já vistas (1) para  $L$  (DBO), fazendo  $K_1 = 0$ ,  $P_s = 0$ ,  $K_3 = K_b$ , onde  $K_b$  é o coeficiente de eliminação das bactérias, em  $\text{dia}^{-1}$ , base e da Lei de Chick [5].

As soluções, portanto, são as mesmas obtidas para  $L$ , com as modificações citadas, fornecendo  $B$  = concentração de bactérias em  $\text{n}^\circ/\text{l}$ .

### 2. Simulação da concentração de sólidos em suspensão

As equações diferenciais são as mesmas empregadas (1) para  $L$  (DBO), fazendo  $K_1 = 0$ ,  $P_s = 0$ ,  $K_3$  = coeficiente de sedimentação, em  $\text{dia}^{-1}$ .

Os resultados, então, são os mesmos obtidos para  $L$ , com as modificações citadas, fornecendo  $C$  = concentração dos sólidos em suspensão.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial ao Eng. Neville M. Martins, por sua decisiva colaboração e aos estagiários D.P. Carvalho, H.A. Pinto Jr., J.B. Camargo Jr., J.R. de Almeida Jr., pela implantação dos programas em computador, e A. Cerchiaro, M.C.G. Segura e E. Bermejo, pelas aplicações feitas.

## REFERÊNCIAS

- 1 - GRANTHAN, G.R., SCHAAKE JR., J.C. and PYATT, E.E. Water quality simulation model, *Journal of the Sanitary Engineering Division*. (Proceedings of the ASCE, 97 Oct. 1971).
- 2 - DEL PICCHIA, W. Estudo de um modelo de autodepuração das águas dos rios em condições aeróbicas e anaeróbicas. *Revista DAE*, (99): 52-7, 1975.
- 3 - ———. O sistema MAPS – Modelo de Análise da Poluição por Simulação. *Revista DAE*, (100): 58-60, 1975.
- 4 - ———. Aplicação da Transformada de Laplace a problemas de engenharia sanitária. *Revista DAE*, (93): 38-44, 1973.
- 5 - METCALF, L. & EDDY, H.P. *Wastewater engineering*. McGraw-Hill, 1972, 782 p.
- 6 - FORSYTHE, G.G. & MALCOM, M.A. *Computer methods for mathematical computations*, Computer Science Department, Stanford University: C 1-C 6, 1967 (Notes for Computer Science, 135).